

§1.3 复变函数

一、复变函数定义及表示形式

1. 定义

Def. 设 D 是复平面 z 上的一个复数集, W 是复平面 w 上的一个复数集, 称 D 到 W 上的映射 f 为定义在 D 上的一个复变函数, 记为 $w = f(z)$, $z \in D, w \in W$

D 称为 f 的定义域, $f(D) \subset W$, $f(D)$ 称为值域

例如, $f(z) = z^2, z \in D$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = \sqrt{z}$ (多值)
 $f(z) = \arg z$ (单值), $f(z) = \text{Arg } z$ (无穷多值)

Rem. 复变函数可以是复变量的实值函数或实变量的复(或实)函数.

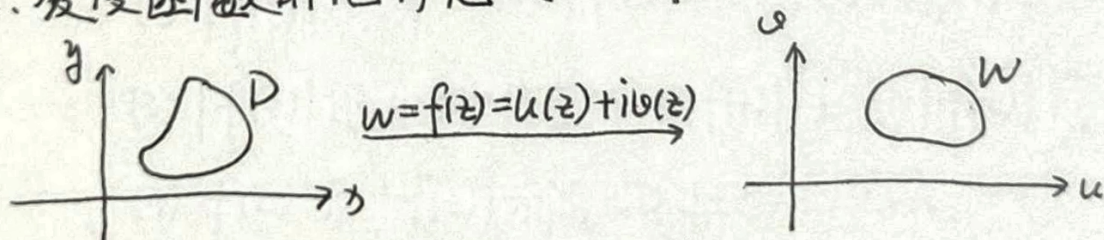
2. 复变函数的几种表示形式

(1) $w = f(z) = u(z) + i v(z)$, 这里 u, v 是两个复变量实函数

(2) $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, 这里 u, v 是两个实变量实函数

(3) $w = f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$

3. 复变函数的几何意义: 映射



二、复变函数的极限与连续

1. 函数极限定义

Def. 设 z_0 是 $f(z)$ 定义域 D 中的一个聚点, 若有一个 $A \in \mathbb{C}$ s.t.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|z - z_0| < \delta$ 且 $z \in D$ 满足 $|f(z) - A| < \varepsilon$,

则称 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0, z \in D$ 时收敛于 A , 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} f(z) = A$

2. $f(z)$ 在 z_0 处连续

Def. 若 $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

3. 连续函数

Def. 若 $f(z)$ 在 D 上处处连续, 则称 $f(z)$ 是 D 上的连续函数

Rem. 复变函数 $f(z)$ 的定义域经常选为区域或闭区域

例如, $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ 称为区域

$|z| \leq 1$, $1 \leq |z| \leq 2$ 称为闭区域

4. 连续的性质

连续的四则运算和复合函数的连续性都成立.

(1) $f(z)$ 连续 $\Rightarrow |f(z)|$ 连续

(2) $f(z)$ 连续 $\Leftrightarrow \overline{f(z)}$ 连续 $|f(z)| = \sqrt{f(z) \cdot \overline{f(z)}}$

(3) $f(z) = u(z) + i v(z)$ 连续 $\Leftrightarrow u(z), v(z)$ 均连续

(4) $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 连续 $\Leftrightarrow u(x, y), v(x, y)$ 均连续

5. 有界闭区域上连续函数的性质

Thm. 若 $f(z)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则:

(1) $|f(z)|$ 有界 (2) $|f(z)|$ 存在最大、最小值

(3) $|f(z)|$ 能取到介于 $\max |f(z)|$ 与 $\min |f(z)|$ 间任意值

(4) $f(z)$ 和 $|f(z)|$ 都在 D 上一致连续.